Jurnal Riset dan Pengabdian Masyarakat
Vol. 5, No. 1, 108-125, 2025

Persamaan Panas Dimensi Satu Menggunakan Metode Beda Hingga

Nurul Yaomil Angreiny
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar
Address: Jl. Sultan Alauddin No.63, Romangpolong, Kec. Somba Opu, Kabupaten Gowa, Sulawesi Selatan
e-mail: rein4786@gmail.com

Ilham Syata
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar
Address: Jl. Sultan Alauddin No.63, Romangpolong, Kec. Somba Opu, Kabupaten Gowa, Sulawesi Selatan
e-mail: ilham.syata@uin-alauddin.ac.id

Muh. Irwan
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar
Address: Jl. Sultan Alauddin No.63, Romangpolong, Kec. Somba Opu, Kabupaten Gowa, Sulawesi Selatan
e-mail: muhirwan@uin-alauddin.ac.id

Try Azisah Nurman
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar
Address: Jl. Sultan Alauddin No.63, Romangpolong, Kec. Somba Opu, Kabupaten Gowa, Sulawesi Selatan
e-mail: try.azisah@uin-alauddin.ac.id

DOI: 10.22373/jrpm.v5i1.5420

Abstract

This research was conducted to examine the simulation process of one-dimensional heat transfer using an application based on the Taylor series so that an implicit finite difference scheme method was used. The first thing to do is model the one-dimensional heat equation and obtain ∂u/∂t=K (∂^2 u)/(∂x^2). After that, discretization is carried out on the one-dimensional heat equation so that it forms a system of linear equations that forms an iteration pattern. The solution to the one-dimensional heat equation obtained using the finite difference method issue n=-αu_(i-1)^(n+1)+(1+2α) u_i^(n+1) - αu_(i By applying the boundary condition u_i^n=-αu_(i-1)^(n+1)+(1+2α) u_i^(n+1)-αu_(i+1)^(n+1). By applying Neumann boundary conditions, we obtain the solution u_(m-1)^n=-α 〖u〗_m^(n+1)+(1+2α) u_(m-1)^(n+1)-αu_(m -2)^(n+1). Then, carry out a simulation using the Matlab application. The simulation results show that there is a change in temperature from high temperature to low temperature which is influenced by time due to the heat transfer process.

Keywords: *One-dimensional heat equation; finite difference method; implicit schema*

Abstrak

Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji proses simulasi terjadinya perpindahan panas dimensi satu dengan penerapan berdasarkan *deret Taylor* sehingga digunakan metode beda hingga skema implisit. Hal pertama yang dilakukan adalah memodelkan persamaan panas dimensi satu dan diperoleh $\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Setelah itu dilakukan diskritisasi pada persamaan panas dimensi satu sehingga akan membentuk sistem persamaan linier yang membentuk pola iterasi. Diperoleh solusi untuk persamaan panas dimensi satu dengan metode beda hingga yaitu, $u_i^n = -\alpha u_{i-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_i^{n+1} - \alpha u_{i+1}^{n+1}$. Dengan menerapkan Syarat batas $u_i^n = -\alpha u_{i-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_i^{n+1} - \alpha u_{i+1}^{n+1}$. Dengan menerapkan Syarat batas Neumann diperoleh solusi $u_{m-1}^n = -\alpha\, u_m^{n+1} + (1+2\alpha)u_{m-1}^{n+1} - \alpha u_{m-2}^{n+1}$. Kemudian, melakukan simulasi menggunakan aplikasi Matlab. Dengan hasil simulasi yang menunjukkan bahwa terjadi perubahan suhu dari suhu tinggi ke suhu rendah yang dipengaruhi oleh waktu sebab terjadinya proses perpindahan panas.

Kata Kunci: *Persamaan panas dimensi satu; metode beda hingga; skema implisit*

A. Pendahuluan

Matematika salah satu ilmu yang memegang peranan penting dalam berbagai bidang keilmuan. Ilmu matematika digunakan tidak hanya dalam penelitian matematika, tetapi juga dapat berfungsi sebagai dasar untuk ilmu eksakta. Banyak kasus/persoalan diberbagai bidang ilmu yang memerlukan perhitungan dengan menggunakan model/persamaan matematika.[1]

Salah satu ilmu matematika yang memiliki peranan penting dengan ilmu pengetahuan lainnya yaitu persamaan diferensial. Pada persamaan diferensial memuat suatu persamaan yang di dalamnya terdapat paling sedikit satu turunan atau diferensial dari suatu fungsi yang belum diketahui.

Persamaan diferensial terbagi menjadi dua menurut peubah bebasnya, yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Jika fungsi yang tidak diketahui hanya memiliki satu variabel independen maka disebut persamaan diferensial reguler (PDB). Ketika fungsi yang di cari memiliki dua atau lebih variabel

[1] Cahya, R., Ikawati, D. S., & Syaifudin, Y. W, *Metode Numerik* (Malang: POLINEMA PRESS, 2018), hlm. 2.

independen maka disebut persamaan diferensial parsial (PDP).[2] Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan PDP adalah persamaan panas.

Persamaan panas dapat diselesaikan secara analitik (eksak) maupun secara numerik. Persamaan panas terbentuk akibat terjadinya proses perpindahan panas dari daerah yang bersuhu tinggi ke daerah bersuhu rendah. Akibat terjadinya proses perpindahan panas maka, terbentuk masalah yang cukup kompleks sebab melibatkan banyak parameter di dalamnya.[3]

Dalam penelitian yang dilakukan oleh (Sanusi, Side, Pratama, & Fitriyani, 2022) menyatakan bahwa perubahan distribusi suhu terjadi secara berangsur-angsur yang dipengaruhi oleh waktu dengan iterasi yang berjalan sampai iterasi yang telah ditentukan.[4] Penelitian lain yang dilakukan oleh (Garnadi, 2004) menyatakan bahwa permasalahan dalam pendekatan syarat batas bebas yang eksplisit maupun implisit untuk persamaan panas dimensi satu menggunakan syarat batas dari satu persamaan diferensial biasa.[5] Selanjutnya, penelitian yang dilakukan oleh[6] menyatakan bahwa skema eksplisit memberikan hasil yang konsisten/stabil apabila kondisi Δt cukup kecil dari kondisi hitungan.

Ditinjau dari penelitian sebelumnya, maka penelitian ini akan menggunakan metode beda hingga dengan menggunakan skema implisit. Pada skema implisit memiliki kelebihan dapat menghasilkan solusi yang stabil dan konvergen dengan langkah waktu cukup besar. Berdasarkan permasalahan di atas, akibat terjadinya perpindahan panas yang mengakibatkan timbulnya masalah yang kompleks dengan melibatkan banyak parameter pada proses perpindahan suhunya sehingga terbentuk persamaan panas. Adapun dalam penyelesaiannya menggunakan salah satu metode numerik yaitu, metode beda hingga. Sebab, pada persamaan panas memiliki persamaan yang kontinu sehingga dapat dengan mudah diselesaikan menggunakan metode beda hingga.

---

[2] Bronson, R., & Costa, G. B, *Persamaan Diferensial Edisi Ketiga* (Jakarta: Erlangga, 2007), hlm. 38.

[3] Zaki, A., Syam, R., & Lubis, K, Solusi Persamaan Panas Dimensi Satu Menggunakan Metode Transformasi Laplace dan Transformasi Elzaki. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, 2022, hlm. 58-65.

[4] Sanusi, W., Side, S., Pratama, M. I., & Fitriyani, Penyelesaian Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit. *Journal of Mathematics*, Vol. 7, No. 2, 2022, hlm. 91-97.

[5] Garnadi, A. D, Masalah Syarat Batas Bebas Persamaan Diferensial Parsial Parabolik. *Journal of Mathematics and Its Applications*, Vol. 3, No. 2, 2004, hlm. 11-27.

[6] Sulistyono, B. A, Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Pada Persamaan Konduksi Panas. *Journal Math Educator Nusantara*, Vol. 1, No. 1, 2015, hlm. 41-46.

B. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang akan digunakan adalah penelitian kajian pustaka. Pada penelitian kajian pustaka ini adalah hasil analisa berdasarkan literatur yang telah tersedia dan telah dipublikasikan. Sehingga menjadi dasar dalam membangun konsep pada penelitian ini. Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa data yang berasal dari penelitian yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya.

Adapun prosedur analisis sebagai berikut:

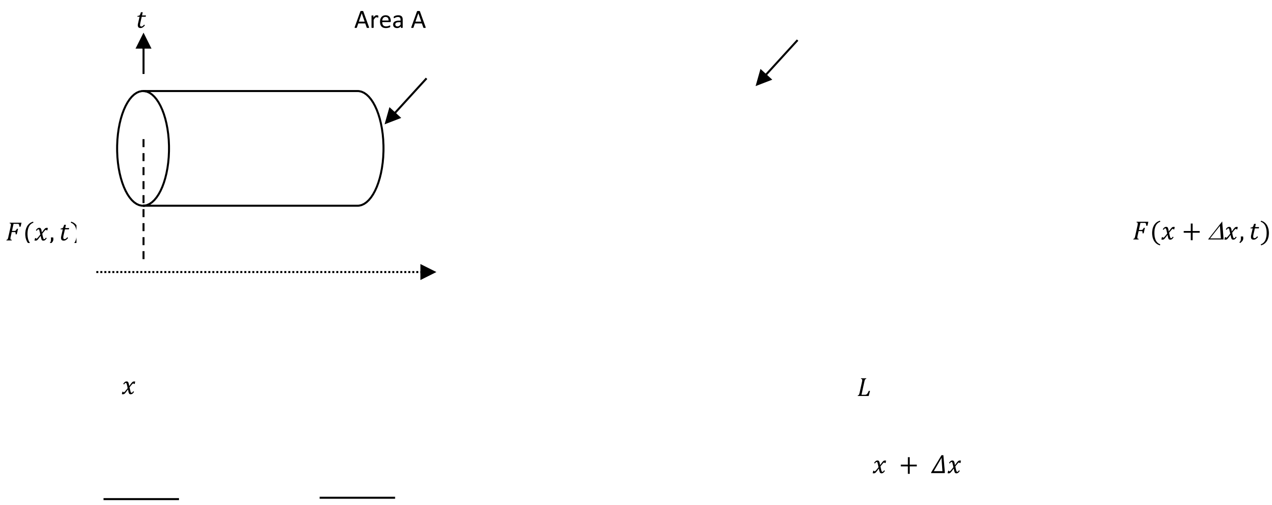
1. Langkah-langkah untuk menentukan solusi dari persamaan dimensi satu menggunakan metode beda hingga, sebagai berikut:
    a. Memberikan asumsi-asumsi pada batang yang dapat menghantarkan panas.
    b. Rumuskan energi yang ada di dalam batang.
    c. Rumuskan energi panas yang dibutuhkan pada ruang batang.
    d. Energi panas dalam batang diturunkan terhadap t.
    e. Rumuskan laju perubahan energi pada batang.
    f. Terapkan aturan integral leibniz pada persamaan laju perubahan energi pada batang.
    g. Naikkan suhu pada batang dari 0 ke u(x,t).
    h. Terapkan hukum pendingin newton.
    i. Terbentuklah persamaan panas dimensi satu.
2. Menentukan syarat awal dan syarat batas.
3. Diskritisasi persamaan panas dimensi satu dengan menggunakan skema beda maju dan skema beda tengah sehingga membentuk persamaan panas skema implisit dalam bentuk sistem persamaan linier.
4. Melakukan simulasi pada persamaan panas dimensi satu menggunakan metode beda hingga skema implisit.
5. Bentuk pola iterasi untuk menyelesaikan persamaan panas dimensi satu.
6. Gunakan program Matlab untuk melakukan visualisasi penyelesaian persamaan panas dimensi satu.
7. Terapkan syarat batas Neumann pada persamaan panas dimensi satu.
8. Diskritisasi persamaan panas dimensi satu dengan syarat batas Neumann.
9. Melakukan simulasi pada persamaan panas dimensi satu dengan syarat batas Neumann menggunakan metode beda hingga skema implisit

10. Gunakan program Matlab untuk melakukan visualisasi penyelesaian persamaan panas dimensi satu dengan syarat batas Neumann

C. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Berikut model persamaan panas dimensi satu:

Persamaan panas didapatkan dari hasil perumusan persamaan aliran panas, seperti pada ilustrasi berikut:



Gambar 4.1 Ilustrasi aliran panas

Seperti pada gambar 4.1 terdapat sebuah batang yang dapat menghantarkan panas dengan beberapa asumsi, diantaranya :

1. Energi panas yang mengalir dalam batang dari bagian yang lebih panas ke bagian yang lebih dingin.
2. Penampang batang tegak lurus dengan sumbu x positif sepanjang L.
3. Ruas dari penampang batang berada di antara x dan $x + \Delta x$ dimana $x < x + \Delta x$.
4. Batang di isolasi secara lateral sehingga tidak terdapat aliran panas yang keluar pada seluruh permukaan.
5. Luas dari kedua sisi penampang batang sama yaitu A.
6. Suhu pada batang dinyatakan dengan bentuk fungsi u yang bergantung pada ruang x dan waktu t yaitu $u(x, t)$.
7. Tidak terdapat energi panas lain di dalam batang.

Pada ruas batang dalam satu dimensi dari x ke $x + \Delta x$ akan sama dengan luas penampang A diberikan massa jenis yang bernilai konstan yaitu ρ maka diperoleh persamaan:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{batang}} = \int_{x}^{x+\Delta x} A \times \rho \qquad (4.1)$$

Misal c adalah konstanta panas pada kapasitas termal batang yang menyatakan jumlah energi panas yang dibutuhkan untuk satuan unit massa suatu benda untuk menaikkan suhu sebesar satu derajat pada batang, maka energi panas yang dibutuhkan sebanyak tiap satuan waktu pada ruang batang adalah:

$$E_{panas\ batang} = \int_{x}^{x+\Delta x} A \times \rho \times c \times u(x,t)\ dx \qquad (4.2)$$

Agar energi dalam batang dari tiap ruas pada batang mengalami perubahan suhu yang akan mengalir ke ruas-ruas pada batang sehingga diperlukan laju perubahan energi dalam batang. Maka, persamaan (4.2) diturunkan terhadap t sehingga diperoleh :

$$E_{perubahan\ batang} = \frac{d}{dt}\left[\int_{x}^{x+\Delta x} A \times \rho \times c \times u(x,t)\ dx\right] \qquad (4.3)$$

Setelah itu dimisalkan $F\ (x,t)$ sebagai jumlah energi yang masuk persatuan unit yang mengalir pada penampang batang kemudian akan mengeluarkan energi $F\ (x + \Delta x, t)$, maka laju perubahan energi tiap satuan waktu, yaitu :

$$E_{fluks} = A\,F(x,t) - A\,F(x + \Delta x, t) \qquad (4.4)$$

atau

$$E_{fluks} = -A[-F(x,t) + F(x + \Delta x, t)] \qquad (4.5)$$

Maka, diperoleh laju perubahan energi tiap satuan waktu pada batang sama dengan fluks panas yang masuk - fluks panas yang keluar :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x}^{x+\Delta x} A \times \rho \times c \times u(x,t)\ dx\right] = -A[-F(x,t) + F(x + \Delta x, t)] \qquad (4.6)$$

Dengan asumsi bahwa batang logam terisolasi sehingga artinya panas tidak dapat hilang melalui batas silinder itu sendiri. Panas hanya dapat mengalir sepanjang silinder dan berpotensi hilang melalui kedua ujungnya tergantung pada batasnya. Selanjutnya, diterapkan asumsi penampang silinder batang yang konstan sehingga diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x}^{x+\Delta x} \rho \times c \times u(x,t)\, dx\right] = -\left[-F(x,t) + F(x+\Delta x,t)\right] \tag{4.7}$$

Pada persamaan ini dibatasi integrasi yang konstan maka, batas tersebut tidak bergantung pada waktu sehingga turunan tidak berinteraksi dengan integral batas. Sehingga turunan di luar integral menurut aturan integral leibniz menjadi turunan parsial waktu di dalam integral, maka didapatkan :

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \rho \times c \times u(x,t)\, dx = F(x,t) - F(x+\Delta x,t) \tag{4.18}$$

Jika suhu di naikkan dari 0 ke $u(x,t)$, maka diperlukan energi panas ruas batang dari x ke $x + \Delta x$ pada waktu t adalah :

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} \rho \times c \times u(x,t)\, dx\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{F(x,t) - F(x+\Delta x,t)}{\Delta x}\right]$$

$$\rho \times c\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x}$$

Sebab titik x adalah titik sembarang di sepanjang batang, oleh karena itu, dimanapun nilai-nilai x adalah benar maka:

$$\rho \times c\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \tag{4.9}$$

Selanjutnya, gunakan hukum pendingin newton yang menjelaskan bahwa energi panas mengalir dari daerah hangat ke daerah yang lebih dingin. Hal ini menyatakan:

$$F(x,t) = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{4.10}$$

Konstanta k disebut konduktifitas panas dari batang. Untuk memperoleh energi panas di dalam batang maka, dilakukan subtitusi persamaan (4.7) dan (4.8) sehingga didapat :

$$\rho \times c\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\rho c\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.11}$$

dimana $K = \frac{k}{\rho c}$ merupakan konstanta difusi, sehingga diperoleh persamaan panas satu dimensi:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (4.12)$$

Persamaan Panas Dimensi Satu Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Implisit

Pada persamaan panas dimensi satu, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ \ 0 < x < L$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(L,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Pada batang dimensi satu menggunakan panjang L, dibagi kedalam n interval dengan panjang masing-masing Δx dan setiap t-interval panjang dari Δt. Dengan domain $0 \leq x \leq L, 0 \leq t$. Titik-titik x menjadi

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x, \ldots, x_i = i\Delta x = L.$$

Selanjutnya, untuk titik-titik t menjadi $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \ldots, t_n = n\Delta t, \ldots$

Maka:

$$u\,(x_i, t_n) = u_i^n. \qquad (4.13)$$

Terdapat suhu $u\,(x,t)$ dengan ruang x dan waktu t dibagi menjadi bagian-bagian kecil hingga berbentuk grid. Pada metode beda hingga dinamakan diskritisasi, dimana pada persamaan panas tersebut digunakan:

1. **Skema Beda Maju**

   Skema beda maju terhadap waktu yakni, turunan pertama u terhadap t yaitu u_t akan dihampiri oleh beda mundur orde satu dengan menggunakan n pendekatan deret Taylor untuk $u(x,t)$ disekitar titik $t + \Delta t$, yaitu:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}. \qquad (4.14)$$

2. **Skema Beda Tengah**

Skema beda tengah terhadap ruang yakni, turunan kedua u terhadap x yaitu u_{xx} akan dihampiri oleh pusat orde dua dengan pendekatan deret Taylor untuk $u\,(x + \Delta x, t\ + \Delta t)$ dan $u\,(x - \Delta x, t\ + \Delta t)$ di sekitar titik x, yaitu :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\,. \qquad (4.15)$$

Dengan skema implisit, fungsi variabel $u(x,t)$ dari persamaan (4.12) dengan mensubtitusi persamaan (4.14) dan (4.15) diperoleh bentuk skema implisit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = K\,\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\,. \quad (4.16)$$

Persamaan di atas dapat ditulis

$$u_i^n = -\frac{K\Delta t}{\Delta x^2}u_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1} + \frac{2K\Delta t}{\Delta x^2}u_i^{n+1} - \frac{K\Delta t}{\Delta x^2}u_{i+1}^{n+1}.$$

(4.17)

Misalkan, $a = \frac{K\Delta t}{\Delta x^2}$, maka persamaan (4.17) menjadi

$$u_i^n = -\alpha\,u_{i-1}^{n+1} + (1+2\alpha)u_i^{n+1} - \alpha u_{i+1}^{n+1}. \qquad (4.18)$$

Persamaan panas pada skema implisit akan membentuk SPL (Sistem Persamaan Linear) sehingga

$$u_2^n = -\alpha\,u_1^{n+1} + (1+2\alpha)u_2^{n+1} - \alpha u_3^{n+1}$$

$$u_3^n = -\alpha\,u_2^{n+1} + (1+2\alpha)u_3^{n+1} - \alpha u_4^{n+1}$$

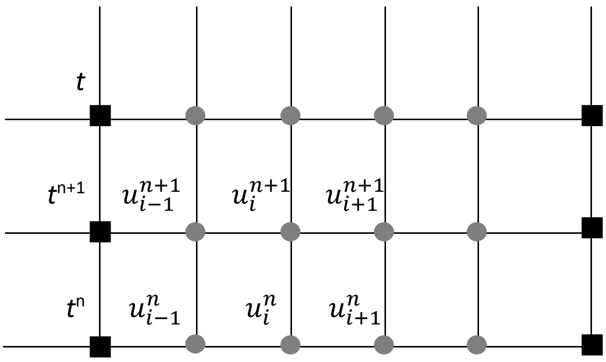
$$u_4^n = -\alpha\,u_3^{n+1} + (1+2\alpha)u_4^{n+1} - \alpha u_5^{n+1}$$

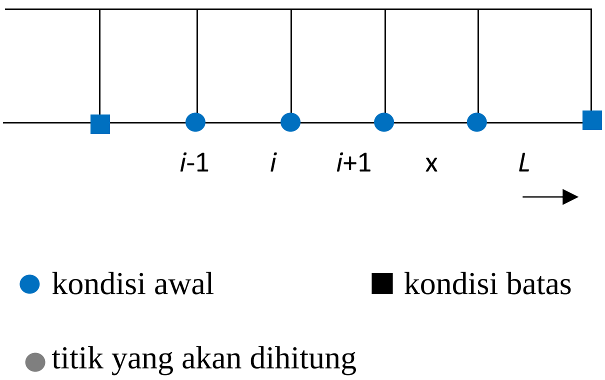
$$\vdots$$

$$u_{i_{max-1}}^n = -\alpha\,u_{i_{max-2}}^{n+1} + (1+2\alpha)u_{i_{max-1}}^{n+1} - \alpha u_{i_{max}}^{n+1}$$

(4.19)

dengan $n\ =\ 1, 2, 3, \ldots n + 1\ dan\ i = 1, 2, \ldots, m.$





Gambar 4.2 Diskritisasi skema implisit

Dengan mengaplikasikan syarat batas, maka diperoleh Sistem Persamaan Linier dari persamaan (4.19) diperoleh dalam bentuk matriks tridiagonal, yaitu:

$$u^n = \begin{vmatrix} u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_m^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+2\alpha) & -\alpha & \dots & 0 \\ -\alpha & (1+2\alpha) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (1+2\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_m^{n+1} \end{vmatrix}$$

(4.20)

Simulasi

Diberikan persamaan panas dimensi satu sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; , t > 0 \qquad (4.21)$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = 10℃ \; dan \; u_{max} = 100℃ \qquad (4.22)$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = 0℃ \qquad (4.23)$$

dengan $\varDelta t = 0.5, \varDelta x = 0.1,$ dan $K = 0.05.$

Pada simulasi ini panjang batang adalah 0.8 meter dan dibagi menjadi 8 grid dengan panjang setiap grid adalah $\varDelta x = 0.1$ dengan waktu 10 detik.

Diketahui $\varDelta t = 0.5, \varDelta x = 0.1,$ dan $K = 0.05,$ diperoleh $\alpha = K \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 2.5$ dan $1 + 2\alpha = 6$. Selanjutnya, mencari solusi u_i^{n+1} menggunakan persamaan (4.19) dengan menerapkan nilai-nilai yang telah diketahui diperoleh solusi untuk skema implisit untuk

$n = 1, 2, \ldots, 20$ dan $i = 1, 2, \ldots, 8$. Maka, untuk perhitungan iterasi pertama. Sebagai berikut:

$u_1^0 = -2.5u_0^1 + 6u_1^1 - 2.5u_2^1$

$$6u_1^1 - 2.5u_2^1 = u_1^0 + 2.5u_0 \qquad \ldots(1)$$

$u_2^0 = -2.5u_1^1 + 6u_2^1 - 2.5u_3^1 \qquad \ldots(2)$

$u_3^0 = -2.5u_2^1 + 6u_3^1 - 2.5u_4^1 \qquad \ldots(3)$

$u_4^0 = -2.5u_3^1 + 6u_4^1 - 2.5u_5^1 \qquad \ldots(4)$

$u_5^0 = -2.5u_4^1 + 6u_5^1 - 2.5u_6^1 \qquad \ldots(5)$

$u_6^0 = -2.5u_5^1 + 6u_6^1 - 2.5u_7^1 \qquad \ldots(6)$

$u_7^0 = -2.5u_6^1 + 6u_5^1 - 2.5u_8^1$

$$-2.5u_6^1 + 6u_7^1 = u_7^0 + 2.5u_8 \qquad \ldots(7)$$

Maka, terbentuklah matriks simultan:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 6 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 6 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 6 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 & 6 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.5 & 6 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.215 & 0.115 & 0.062 & 0.033 & 0.017 & 0.009 & 0.004 \\ 0.115 & 0.276 & 0.148 & 0.079 & 0.042 & 0.021 & 0.009 \\ 0.062 & 0.148 & 0.294 & 0.157 & 0.083 & 0.042 & 0.017 \\ 0.033 & 0.079 & 0.157 & 0.297 & 0.157 & 0.079 & 0.033 \\ 0.017 & 0.042 & 0.083 & 0.157 & 0.294 & 0.148 & 0.062 \\ 0.009 & 0.021 & 0.042 & 0.079 & 0.148 & 0.276 & 0.115 \\ 0.004 & 0.009 & 0.017 & 0.033 & 0.062 & 0.115 & 0.215 \end{vmatrix}$$

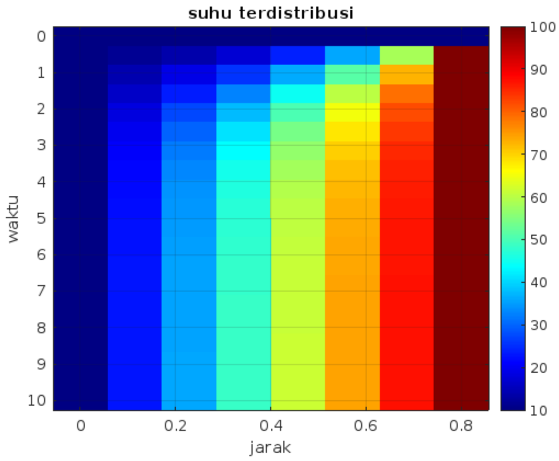
$$= \begin{vmatrix} 6.279 \\ 5.070 \\ 5.889 \\ 9.063 \\ 15.862 \\ 29.006 \\ 53.753 \end{vmatrix}$$

Kemudian untuk iterasi selanjutnya dilakukan hal yang sama hingga iterasi ke-20 maka diperoleh :

N	u_1^{n+1}	u_2^{n+1}	$\cdots$	u_7^{n+1}	u_8^{n+1}

0	6.279	5.07	$\cdots$	53.753	100
1	9.599	10.526	$\cdots$	70.077	100
2	12.240	15.536	$\cdots$	77.062	100
3	14.428	19.731	$\cdots$	80.869	100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
18	21.170	32.353	$\cdots$	88.670	100
19	21.192	32.393	$\cdots$	88.692	100
20	21.208	32.423	$\cdots$	88.708	100

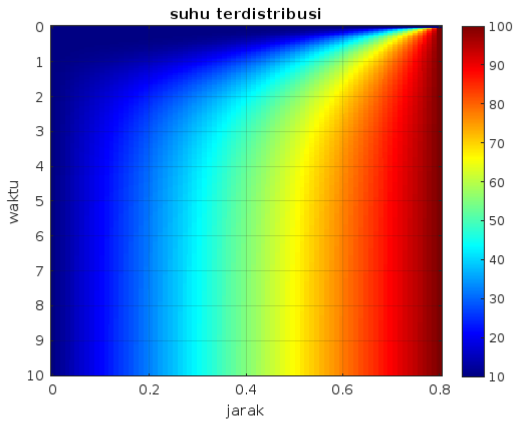
Berdasarkan hasil hitungan di atas dengan $x = 0.8$ pada waktu $t = 10$ detik maka dapat dilihat seiring bertambahnya waktu penyebaran panas pada bagian batang bertambah pula suhu pada batang. Selanjutnya, dapat dilihat pada ilustrasi penyebaran panas pada batang seperti pada gambar berikut:



Gambar 4.4 Ilustrasi Persamaan Panas Dimensi Satu

Pada gambar 4.4 merupakan hasil dari simulasi persamaan panas dimensi satu menggunakan metode beda hingga skema implisit. Warna biru menggambarkan suhu yang dingin sedangkan warna merah menggambarkan suhu yang panas. Hasil simulasi tersebut menunjukkan bahwa suhu pada batang mengalami perubahan warna yang signifikan yaitu terjadinya perubahan dari batang yang bersuhu tinggi ke batang yang bersuhu rendah secara berangsur-angsur. Hal ini berarti waktu berpengaruh sehingga dapat mengubah suhu yang berada di posisi x.

Selanjutnya, diberikan □x = 0.01 dan □t = 0.05 pada simulasi persamaan panas dimensi satu di atas. Maka, diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 4.5 Hasil simulasi dengan menggunakan metode beda hingga dimana $\Delta x = 0.01$ dan $\Delta t = 0.05$

Hasil simulasi pada gambar 4.5 dapat dilihat bahwa pendistribusian aliran panas nya terlihat lebih jelas dibandingkan pada gambar 4.4. Akan tetapi, kedua simulasi tersebut menunjukkan hal yang sama yaitu, batang yang memiliki suhu tinggi berangsur-angsur berpindah ke daerah batang yang bersuhu rendah.

Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Syarat batas Neumann Menggunakan Metode Beda Hingga

Pada persamaan panas dimensi satu, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \;\; 0 < x < L$$

dengan nilai awal

$$u(x,0) = \sin{(\pi x)}$$

dengan syarat batas

$$u_x(0,t) = 0, \;\; u_x(L,t) = 0, \;\; t \geq 0\ .$$

Kondisi pada $x = 0$ menunjukkan ujung batang terisolasi, sedangkan pada $x = L$ batang dapat dipanaskan untuk setiap t-interval panjang dari Δt. Dengan domain $0 \leq$

$x \leq L$, sehingga diperoleh titik batas untuk $x = x_0, \dots, x_i$ dimana $i = 0, 1, \dots, m-1$ sedangkan untuk $t = t_0, \dots, t_n$ dimana $n = 0, 1, \dots, n$.

Selanjutnya, untuk Syarat batas Neumann $u_x(0,t) = 0$ dan $u_x(1,t) = 0$ diperoleh :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad u_0^{n+1} = u_1^{n+1}$$

dan

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \quad \rightarrow \quad u_m^{n+1} = u_{m-1}^{n+1}. \qquad (4.23)$$

Subtitusi persamaan (4.23) pada persamaan (4.19), maka diperoleh persamaan panas dimensi satu dengan Syarat batas Neumann :

$$u_1^n = -\alpha\, u_0^{n+1} + (1+2\alpha)u_1^{n+1} - \alpha u_2^{n+1}$$

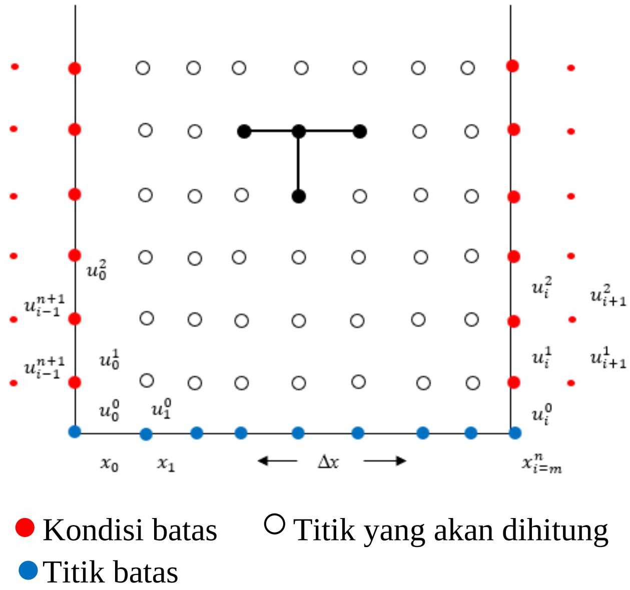
$$u_2^n = -\alpha\, u_1^{n+1} + (1+2\alpha)u_2^{n+1} - \alpha u_3^{n+1}$$

$$\vdots$$

$$u_{m-1}^n = -\alpha\, u_m^{n+1} + (1+2\alpha)u_{m-1}^{n+1} - \alpha u_{m-2}^{n+1}$$

$$(4.24)$$

Pada gambar di bawah ini memperlihatkan titik yang akan dihitung.



Gambar 4.6 Diskritisasi Persamaan Panas dengan Syarat Batas Neumann

Simulasi

Diberikan persamaan panas dimensi satu sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ \ ,t > 0$$

dengan syarat batas

$$u_x(0,t) = 0 \ dan \ u_x(L,0) = 0$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = \sin{(\pi x)}$$

dengan $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.125$, dan $K = 0.1$.

Pada simulasi ini panjang batang adalah 1 meter yang akan dibagi menjadi 8 grid dengan panjang setiap grid adalah $\Delta x = 0.125$ dengan waktu 1 detik. Selanjutnya, mencari solusi u_i^{n+1} menggunakan persamaan (4.24) dengan menerapkan syarat batas dan syarat awal adalah sebagai berikut:

$u_0^0 = \sin{(\pi(0))} = 0$

$u_1^0 = sin(\pi(0.125)) = 0.382$

$u_2^0 = sin(\pi(0.25)) = 0.707$

$u_3^0 = sin(\pi(0.375)) = 0.923$

$u_4^0 = sin(\pi(0.5)) = 1$

$u_5^0 = sin(\pi(0.625)) = 0.923$

$u_6^0 = sin(\pi(0.75)) = 0.707$

$u_7^0 = sin(\pi(0.875)) = 0.382$

$u_8^0 = sin(\pi(1)) = 0$

Dengan syarat batas neumann :

$$u_0^{n+1} = 0 \text{ dan } u_8^{n+1} = 0$$

Terapkan pada persamaan (4.22)

$u_1^0 = -0.64u_0^1 + 2.28u_1^1 - 0.64u_2^1$

$2.28u_1^1 - 0.64u_2^1 = u_1^0 + 0.64u_0^{} \ \dots(1)$

$u_2^0 = -0.64u_1^1 + 2.28u_2^1 - 0.64u_3^1 \ \dots(2)$

$u_3^0 = -0.64u_2^1 + 2.28u_3^1 - 0.64u_4^1 \ \dots(3)$

$u_4^0 = -0.64u_3^1 + 2.28u_4^1 - 0.64u_5^1 \ \dots(4)$

$u_5^0 = -0.64u_4^1 + 2.28u_5^1 - 0.64u_6^1 \; \ldots (5)$

$u_6^0 = -0.64u_5^1 + 2.28u_6^1 - 0.64u_7^1 \; \ldots (6)$

$u_7^0 = -0.64u_6^1 + 2.28u_7^1 - 0.64u_8^1$

$2.28u_7^1 - 0.64u_6^1 = u_7^0 + 0.64u_8 \ldots (7)$

maka, terbentuk matriks dengan persamaan simultan:

$$\begin{vmatrix} 2.28 & -0.64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.64 & 2.28 & -0.64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.64 & 2.28 & -0.64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.64 & 2.28 & -0.64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.64 & 2.28 & -0.64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.64 & 2.28 & -0.64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.64 & 2.28 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.382 \\ 0.707 \\ 0.923 \\ 1 \\ 0.923 \\ 0.707 \\ 0.382 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \\ u_6^1 \\ u_7^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.479 & 0.147 & 0.045 & 0.013 & 0.004 & 0.001 & 0.0003 \\ 0147 & 0.525 & 0.161 & 0.049 & 0.015 & 0.004 & 0.001 \\ 0.045 & 0.161 & 0.529 & 0.162 & 0.049 & 0.015 & 0.014 \\ 0.013 & 0.049 & 0.162 & 0.529 & 0.162 & 0.049 & 0.013 \\ 0.004 & 0.015 & 0.049 & 0.162 & 0.529 & 0.161 & 0.045 \\ 0.001 & 0.004 & 0.015 & 0.049 & 0.161 & 0.525 & 0.147 \\ 0.0003 & 0.001 & 0.004 & 0.013 & 0.045 & 0.147 & 0.479 \end{vmatrix}$$

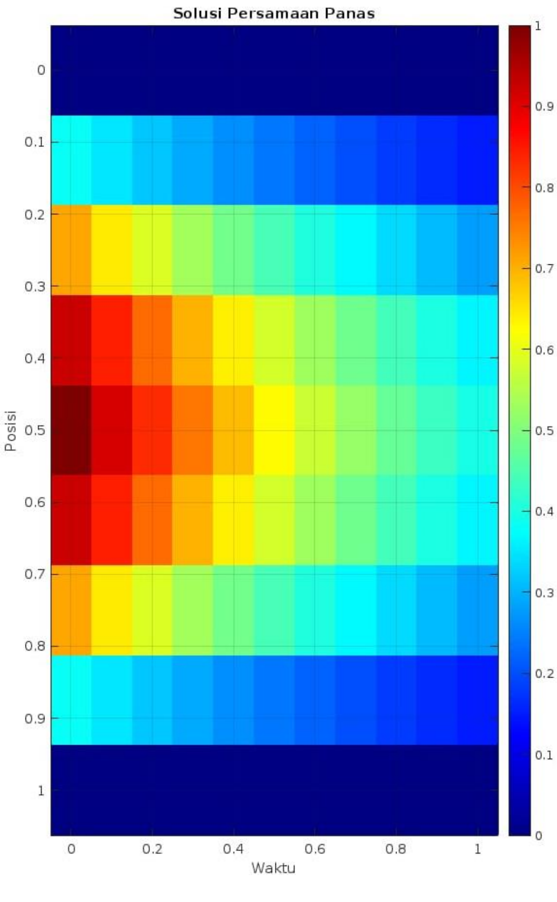
$$= \begin{vmatrix} 0.348 \\ 0.644 \\ 0.841 \\ 0.91 \\ 0.841 \\ 0.644 \\ 0.348 \end{vmatrix}$$

Kemudian untuk iterasi selanjutnya dilakukan hal yang sama hingga iterasi ke-10 maka diperoleh :

n	u_1^{n+1}	u_2^{n+1}	$\cdots$	u_6^{n+1}	u_7^{n+1}
0	0.348	0.644	$\cdots$	0.644	0.348
1	0.317	0.586	$\cdots$	0.586	0.317
2	0.289	0.534	$\cdots$	0.534	0.289
3	0.289	0.534	$\cdots$	0.534	0.289
4	0.263	0.487	$\cdots$	0.487	0.263
5	0.24	0.443	$\cdots$	0.443	0.24
6	0.218	0.404	$\cdots$	0.404	0.218

7	0.199	0.368	⋯	0.368	0.199
8	0.181	0.335	⋯	0.335	0.181
9	0.165	0.306	⋯	0.306	0.165
10	0.150	0.278	⋯	0.278	0.150

Berdasarkan hasil hitungan di atas dengan $x = L = 1$ pada waktu $t = 1$ detik maka dapat dilihat bahwa penyebaran panas berada di titik $n + 1 = 5$ yang berarti bahwa penyebaran panas pada bagian tengah batang sehingga seiring berjalan nya waktu juga bertambah suhu pada batang. Selanjutnya, dapat dilihat pada ilustrasi penyebaran panas pada batang seperti pada gambar berikut:



Gambar 4.7 Kondisi suhu awal pada saat t = 1 detik

Kondisi awal distribusi suhu di tunjukkan pada gambar 4.7 hasil simulasi menunjukkan pendistribusian aliran panas berada di tengah batang, suhu secara berangsur-angsur menuju 0 secara seragam.

D. Simpulan

Pada penyelesaian persamaan panas dimensi satu didapatkan model persamaan, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Dengan menggunakan pendekatan metode beda hingga skema implisit didapatkan solusi persamaan panas dimensi satu dengan rumus:

$$u_i^n = \alpha u_{i-1}^{n+1} + (1-2\alpha)u_i^{n+1} + \alpha u_{i+1}^{n+1}.$$

Untuk solusi persamaan panas dimensi satu menggunakan metode beda hingga skema implisit dengan menerapkan syarat batas neumann diperoleh solusi:

$$u_{m-1}^n = \alpha\, u_m^{n+1} + (1-2\alpha)u_{m-1}^{n+1} + \alpha u_{m-2}^{n+1}$$

Dengan menerapkan *ghost poinst* dimana $i = 0, \ldots, m-2$.

Hasil simulasi yang menunjukkan terjadinya perubahan suhu dari suhu tertinggi ke suhu terendah pada tiap-tiap grid yang ada sehingga membuktikan bahwa waktu berpengaruh pada tiap iterasi yang terjadi pada x.

DAFTAR PUSTAKA

Bronson, R., & Costa, G. B. *Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga, 2007.

Cahya, R., Ikawati, D. S., & Syaifudin, Y. W. *Metode Numerik*. Malang: POLINEMA PRESS, 2018.

Garnadi, A. D. "Masalah Syarat Batas Bebas Persamaan Diferensial Parsial Parabolik". *Journal of Mathematics and Its Applications*, Vol. 3, No. 2, hlm. 11-27, 2004.

Sanusi, W., Side, S., Pratama, M. I., & Fitriyani. "Penyelesaian Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit". *Journal of Mathematics,* Vol. 7, No. 2, hlm. 91-97, 2022.

Sulistyono, B. A. "Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Pada Persamaan Konduksi Panas". *Journal Math Educator Nusantara*, Vol. 1, No. 1, hlm. 41-46, 2015.

Zaki, A., Syam, R., & Lubis, K. "Solusi Persamaan Panas Dimensi Satu Menggunakan Metode Transformasi Laplace dan Transformasi Elzaki". *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, hlm. 58-65, 2022.